9a) i) Wenn laut Algorithmus aus Aufgabe 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n+1}$ ein neuer Zyklus hinzukommt, kann man $i$ mit $n+1$ gleichsetzen, um die Wahrscheinlichkeit des Hinzukommens eines Zyklus von Schritt $i-1$ auf $i$ auszurechnen:

$\mathbb{P}$("Ein neuer Zyklus kommt von Schritt $i-1$ auf $i$ hinzu")

$$= \frac{1}{(i-1)+1} = \frac{1}{i}$$ ✓ +1/1

ii) Wir nehmen uns die Indikatorvariable $X := \begin{cases} 1, & \text{falls ein Zyklus hinzukommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

über die wir für $i = 1 \dots 100$ summieren.

In jedem Schritt beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{1}{i}$. Daraus ergibt sich folgender Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(\dots) = 1 + \sum_{i=2}^{100} \mathbb{P}(X=1) = 1 + \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{i} \approx 5{,}187\dots$$ ✓ +2/2

b) i) Durch die kreisförmige Anordnung der 100 Zahlen ist außer Betracht, an welcher Position welche Zahl steht. Es ist nur noch die Frage, ob von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen die Größte in der Mitte steht.

Sei $S := \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \{1 \dots 100\}\}$

und $A := \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \neq a_3,\ a_1 < a_2 > a_3,\ a_1, a_2, a_3 \in \{1 \dots 100\}\}$

und $X$ ist Zufallsvariable $= (X_1, X_2, X_3) \in S$

$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{3}$ ✓ jawohl! +1,5/1,5

ii) Wenn wir über die Indikatorvariable summieren, erhalten wir den Erwartungswert: (weshalb?)

$$\mathbb{E}(\dots) = \sum_{i=1}^{100} (\mathbb{P}(X=1)) = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{3} = 33{,}\overline{3} \quad \text{mit } \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{3}$$ +1/1,5

11a) Bei folgenden Ereignissen ist der nächste ~~größere~~ Wurf größer als der Vorgänger:

$$\left.\begin{array}{l} 1, \text{ danach } 2 \\ 1, \text{ danach } 3 \\ 2, \text{ danach } 3 \end{array}\right\} \text{haben die W'keit: } \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{11}{36}$$ ✓

Der Erwartungswert der Würfe, bei denen der folgende höher ist, berechnet sich über die Summe der Indikatorvariable $X := \begin{cases} 1, & \text{falls der folgende Wurf höher ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{9} \mathbb{P}(X=1) = \sum_{i=1}^{9} \tfrac{11}{36} = 2{,}75$$ ✓ $+\,2/3$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum X_i] = \sum \mathbb{E}(X_i)$
$= \sum \mathbb{P}(X_i=1)$
$= \ldots$

b) Die Anzahl der erwarteten Runs beträgt:

$$1+9\left(\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right)\right)$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{9}\mathbb{P}(X=1) \quad \text{mit } X := \begin{cases} 1, & \text{falls ein Run beginnt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

siehe oben Rechnungen begründen und beschreiben!

warum gilt das?

$$= 1+\sum_{i=1}^{9}\tfrac{11}{18} = 6{,}5$$ ✓ $+\,2/3$