13a) Der Inhalt der Kreisscheibe S beträgt:

$$\left(\frac{d}{2}\,cm\right)^2 \cdot \pi = 25\pi\ cm^2 \approx 78{,}539\ldots\ cm^2 \quad \text{mit } d = 10cm$$

Der Inhalt der Vereinigung A beträgt:

$$4 \cdot \left(\frac{d}{2}\,cm\right)^2 \cdot \pi = 4 \cdot 0{,}0025\,cm^2 \cdot \pi \approx 0{,}0314\ldots\ cm^2$$

Seien X_n Zufallsvariablen, zufällig aus S. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{2500} = p$

Die Poissonapproximation für die Wahrscheinlichkeit, dass genau $k = 5$ Punkte in A fallen mit $n = 10000$ Würfen, beträgt:

$$\mathbb{P}(X=5) \rightarrow \frac{(n \cdot p)^5}{5!} \cdot e^{-(n \cdot p)} = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = \frac{128}{15e^4} \approx 0{,}1562\ldots$$

+2/2 ✓

b) i) p ist nun $10 \cdot \frac{1}{2500} = \frac{1}{250}$, da nun immer 10 Punkte mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2500}$ in S geworfen werden.

Die Exponentialapproximation für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der erste Treffer eine Sekunde auf sich warten lässt, beträgt: ✓

$$p_\lambda(X > 1000) = e^{-\lambda \cdot 1000} \quad \text{mit } \lambda = \frac{1}{250}$$

$$p_{\frac{1}{250}}(X > 1000) = e^{-\frac{1000}{250}} = e^{-4} \approx 0{,}0183156\ldots$$ ✓

+2/2

ii) Analog dazu berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Treffer mindestens eine, aber höchstens 3 Sekunden auf sich warten lässt:

$$p_{\frac{1}{250}}(X > 1000) - p_{\frac{1}{250}}(X > 3000) = e^{-4} - e^{-\frac{3000}{250}} \approx 0{,}0183156\ldots$$ ✓

+2/2

14a) i) Sei $S := \{1 \dots n\}^n$, $A :=$ „Die Menge aller Permutationen"
und X Zufallsvariable aus S, dann ist die
Wahrscheinlichkeit, dass F injektiv ist gleich der
Wahrscheinlichkeit, dass F eine Permutation von S erzeugt:

$$P(X \in A) = \frac{\# A}{\# S} = \frac{n!}{n^n}$$ ja! $+1{,}5/1{,}5$

Mit Einsetzen der Stirling-Näherung folgt:

$$P(X \in A) = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}\,\frac{1}{e^n}}{1} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$$ ✓ $+0{,}5/0{,}5$

Die Wahrscheinlichkeit, dass F injektiv ist, läuft mit wachsenden n gegen Null.

ii) S und X analog zu i), hingegen sind für jedes $F(i)$ nur $(n-1)$ Plätze zu belegen, nämlich genau alle außer i selbst. Es folgt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(\text{"}F(i) \neq i, \forall i \in \{1 \dots n\}) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = 1/e$$ ✓ $+1{,}5/1{,}5$ lim...

b) F ist genau dann surjektiv, wenn auf jedes r mindestens ein n abgebildet wird.

Hierzu ist es hilfreich, die Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses "F ist surjektiv" zu berechnen:

$$\mathbb{P}(\text{„F ist surjektiv"}) = 1 - \Big(\underbrace{\left(4/5\right)^{10}}_{\text{alle 10 n fallen auf 4 bestimmte r...}} + \underbrace{\left(3/5\right)^{10}}_{\text{... auf 3 bestimmte r...}} + \underbrace{\left(2/5\right)^{10}}_{\text{... auf 2...}} + \underbrace{\left(1/5\right)^{10}}_{\text{... oder auf ein bestimmtes r}}\Big)$$

$$= 1 - \frac{346273}{390625} = 0{,}88647424 \approx 88{,}6\%$$

→ leider nein, da gehen ein paar Möglichkeiten verloren...
$+0{,}5/2$