17 a) Es sei $S := \{9, 10.50, 14\}$

4/6

Und X Zve aus S. Gegeben ist: $P(X=9) = \frac{60}{100}$

$P(X = 10.50) = \frac{30}{100}$

$P(X=14) = \frac{10}{100}$

Dann ist $E[X] = 9 \cdot \frac{60}{100} + 10.50 \cdot \frac{30}{100} + 14 \cdot \frac{10}{100} = 9{,}95$ ✓

Und $Var[X] = \sum_{a \in S} (a-\mu)^2 \cdot P(X=a)$ ✓

1/1 $= (9-9{,}95)^2 \cdot \frac{60}{100} + (10{,}50 - 9{,}95)^2 \cdot \frac{30}{100} + (14 - 9{,}95)^2 \cdot \frac{10}{100}$

$= 2{,}2725$ ✓

1/1 b) Beim Aufrufen aller Hilfskräfte, ist kein Zufall mehr im Spiel. ✓

Die Reihenfolge ist außer Betracht, wenn wir $W_1 \dots W_{100}$ aufaddieren. $\Rightarrow Var[W_1 + \dots + W_{100}] = 0$

1/1 c) $Var[W_1 + \dots + W_{100}] = \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] = -\sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j]$ Da alle Kovarianzen gleich sind! ...Und irgendwie wurde X zu W sry!

$\cancel{100} \cdot 2{,}2725 = -\cancel{100} \binom{100}{2} \cdot Cov[W_1, W_2]$ | :100

$2{,}2725 = -\binom{100}{2} \cdot Cov[W_1, W_2]$ | :4950

$\frac{101}{220\,000} = -Cov[W_1, W_2]$ | $\cdot(-1)$

$Cov[W_1, W_2] = -\frac{101}{220000}$ ✓

1/2 d) i) $\frac{1}{10} \cdot E[W_1 + \dots + W_{10}] = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot$ ~~2,2725~~ ~~2,2725~~ $9{,}95 = 9{,}95$ ✓

$\frac{1}{10} \cdot Var[W_1 + \dots W_{10}] = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot$ ~~...~~

$\frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 9 + \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot 10{,}5 + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot 14$

$= 5{,}625$ f

0/4 e) fehlt

4,5/6

20 a i) $F_x(U) = \mathbb{P}(U \le x) \Rightarrow \mathbb{P}(U^5 \le x) = \mathbb{P}(U \le \sqrt[5]{x}) = \int_0^{\sqrt[5]{x}} 1\,dx = \sqrt[5]{x}$, für 0
, 0 für x
, 1 sonst

ii) Sei $F(x) = \sqrt[5]{x}$, dann ist $F'(x) = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}$

iii) $\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx = u(1) \cdot v(1) - u(0) \cdot v'(0) - \int_0^1 u \cdot v'\,dx$

$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - \int_0^1 \sqrt[5]{x} \cdot 1\,dx = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = \mathbb{E}[X]$

iv) $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$\Rightarrow Var[U^5] = \mathbb{E}[U^{5^2}] - \mathbb{E}[U^5]^2$

$= Var[U^5] = \mathbb{E}[U^{10}] - \frac{1}{36} = \frac{1}{11} - \frac{1}{36} = \frac{25}{396}$

$F_x(U) = \mathbb{P}(U \le X) \Rightarrow \mathbb{P}(U^{10} \le x) = \mathbb{P}(U \le \sqrt[10]{x})$

$= \int_0^{\sqrt[10]{x}} 1\,dx = \sqrt[10]{x} \Rightarrow F_x(U) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x > 1 \\ \sqrt[10]{x}, & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathbb{E}[U^{10}] = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{10} \cdot x^{\frac{9}{10}}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx = u(1) \cdot v'(1) - u(0) \cdot v'(0) - \int_0^1 u \cdot v'\,dx$

$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - \int_0^1 \sqrt[10]{x} \cdot 1\,dx$

$= 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$

1,5/2

b) $F_x(U) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}((1-U)^5 \le x) = \mathbb{P}((-\sqrt[5]{u} + 1) \le U \le 1)$

$= \int_{-\sqrt[5]{u}+1}^{1} f'(u)\,da = 1 - (-\sqrt[5]{u} + 1) = \sqrt[5]{u}$

2/2

$\Rightarrow$ Dichte, Erwartungswert, Varianz analog zu a)

20c) i) $F_X(U) = \mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}(4X+1 \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \frac{x-1}{4}) = \int_0^{\frac{x-1}{4}} f(x)\,dx$

1/2

Exp(2)-Vert:

$f_2(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$F(x) = P(X \leq x) = -e^{-\lambda x}$

$= \int_0^{\frac{x-1}{4}} 2 \cdot e^{-2x}\,dx = 1 - e^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}} \Rightarrow F(U) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ 1 - e^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}}, & \text{sonst} \end{cases}$

ii) $F'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}}$

iii) $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} x\,dx = -\int_0^\infty -e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}\,dx$

Folgefehler

$= -\left[2e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}\right]_0^\infty = -(0 - (+2e^{\frac{1}{2}})) = 2e^{\frac{1}{2}}$

iv) $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$F_X(X) = \mathbb{P}(X \leq \frac{\sqrt{x}-1}{4}) = \int_0^{\frac{\sqrt{x}-1}{4}} 2e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^{\frac{\sqrt{x}-1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}} + 1$

$f(x) = \frac{d}{dx}\left(-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}} + 1\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}}$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}}\,dx$

$= \int_0^\infty \frac{1}{4} x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}}\,dx$

$= \int_0^\infty \frac{1}{4} x^{+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}}\,dx$

$= -\int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}} \cdot 8\,dx = 8\sqrt{e}$

$Var[X] = 8\sqrt{e} - (2e^{\frac{1}{2}})^2 = 8\sqrt{e} - 4e \approx 2{,}3166$