21 a) Zu zeigen: $\int_0^\infty a^n e^{-a}\, da = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang für $n=0$:

$$\int_0^\infty a^0 e^{-a}\, da = \left[-e^{-a}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1 = 0! \quad \checkmark$$

Daraus folgt die

Induktionsannahme: Die zu zeigende Formel gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsschritt: Man behaupte, die Formel gelte auch für ein (und somit jedes) „Folge-n":

Beweis:

$$\int_0^\infty a^{(n+1)} e^{-a}\, da \overset{!}{=} (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow \left[-a^{(n+1)} e^{-a}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -(n+1) a^n e^{-a}\, da = (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 - -(n+1) \underbrace{\int_0^\infty a^n e^{-a}\, da} = (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \cdot n! \text{ (= Induktionsannahme)} = (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow (n+1)! = (n+1)! \quad \square$$

+ 1,5/1,5

b) i) $E[X] = \int_0^\infty \frac{1}{3!} a^3 \cdot e^{-a} \cdot a\, da = \frac{1}{6} \int_0^\infty a^4 e^{-a}\, da = \frac{1}{6} \cdot 4! = 4$

$$Var[X] = \int_0^\infty \frac{1}{6} a^3 e^{-a} (a-4)^2\, da = \int_0^\infty \frac{1}{6} a^3 e^{-a} (a^2 - 8a + 16)\, da$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^\infty a^5 e^{-a}\, da - \int_0^\infty 8a \cdot a^3 e^{-a}\, da + \int_0^\infty 16 \cdot a^3 e^{-a}\, da$$

$$= \frac{1}{6}\left(5! - (8 \cdot 4!) + (16 \cdot 3!)\right) = 4$$

+ 1,5/1,5

ii) $E[Y] = E[X/3 + 5] = E[X/3] + E[5] = \frac{1}{3} E[X] + 5 = \frac{19}{3}$

$Var[Y] = Var[X/3 + 5] = Var[X/3] = \frac{1}{9} Var[X] = \frac{1}{9} \cdot 4 = \frac{4}{9}$

Die Dichtefunktion berechnet sich wie folgt:

$\mathbb{P}(\frac{X}{3}+5 \le x) = \mathbb{P}(X/3 \le x-5) = \mathbb{P}(X \le 3x-15)$

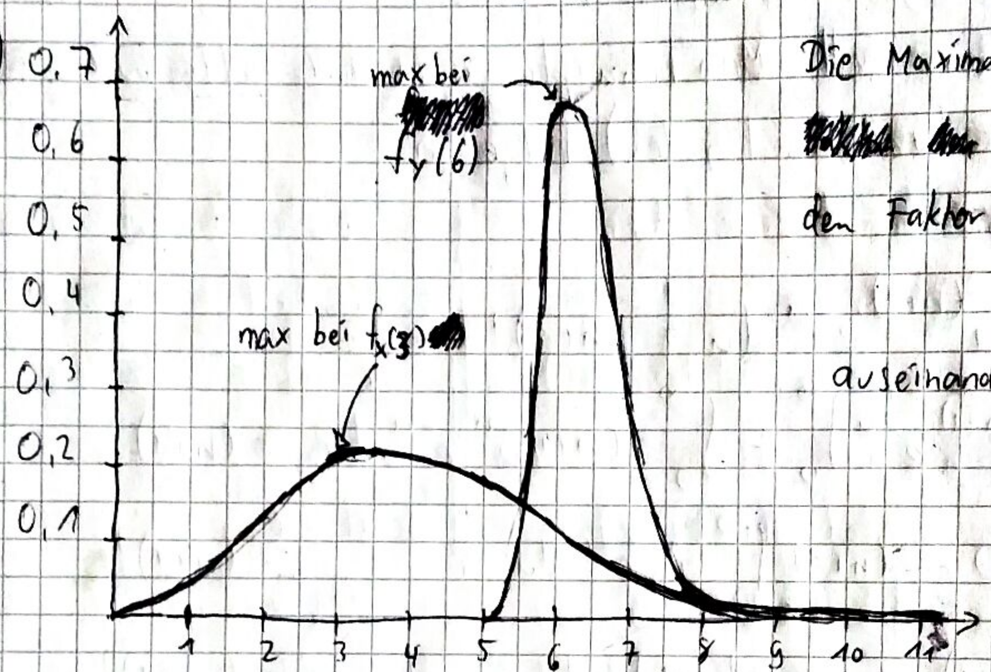
Setze $3x-15$ für a in die Dichte von b) ein.

$\rightarrow$ Dichte für $Y = f(y) = \begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{3!}(3x-15)^3 e^{-(3x-15)}, & \text{für } x \ge 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

das Vorzeichen passt nicht!

Da $\int_5^\infty \frac{1}{3!}(3x-15)^3 e^{-(3x-15)} = \frac{1}{3}$ muss die Dichtefunktion den Vorfaktor 3 erhalten.

vi)



Die Maximalwerte der Dichten liegen um den Faktor $\frac{f_Y(6)}{f_X(3)} = 3$ auseinander. ✓ +2

schön!

+1/1

24 a) zu zeigen: $\mathbb{P}(c \le X \le d) \approx \Phi\left(\frac{1}{\sigma}(c-\frac{1}{2}-\mu) \le Z \le \frac{1}{\sigma}(d+\frac{1}{2}-\mu)\right)$

Wir wissen: $\mathbb{P}(c \le X \le d) = \sum_{i=c}^{d} \mathbb{P}(X=i) \approx \sum_{i=c}^{d}\left(\int_{i-1/2}^{i+1/2}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right) dx\right)$

$= \int_{c-1/2}^{d+1/2}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right) dx$ ✓

Ersetze $\frac{x-\mu}{\sigma}$ durch y, wobei wir nun nach y integrieren müssen: $1/\sigma = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \sigma\, dy$

Wir ersetzen nun die Grenzen $c-\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{\sigma}(c-\frac{1}{2}-\mu)$ bzw. $d+\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{\sigma}(d+\frac{1}{2}-\mu)$

$\Rightarrow P(c \le X \le d) \approx \int_{1/\sigma(c-1/2-\mu)}^{1/\sigma(d+1/2-\mu)} \left(\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, y^2}\right) dy = \int_{1/\sigma(c-1/2-\mu)}^{1/\sigma(d+1/2-\mu)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, y^2}\right) dx$

$= \Phi\left(\frac{d+1/2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-1/2-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(1/\sigma\,(c-1/2-\mu) \le Z \le (d+1/2-\mu)\right)$ □

gut! ✓ +2/2

24b) $\mathbb{P}(X \cancel{\le} {>} 100) \le 0{,}025$ mit X sei $bin(n, 0{,}9)$-verteilt

$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(X \le 100) \le 0{,}025$

↳ der Fehler zieht sich leider jetzt durch die ganze Rechnung...

$\Leftrightarrow 0{,}975 \le \mathbb{P}(X \le 100)$

$\Leftrightarrow 0{,}975 \le \phi\left(1/\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot n}\,(100 + 0{,}5 - 0{,}9n)\right)$ ✓

$\Leftrightarrow 0{,}975 \le \phi\left(\frac{100{,}5 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)$

$\Leftrightarrow \phi^{-1}(0{,}975) \le 1/\sqrt{n}\,(335 - 3n)$

$\Leftrightarrow 1{,}96 \le 1/\sqrt{n}\,(335 - 3n)$

$\Leftrightarrow 1{,}96\sqrt{n} \le 335 - 3n$

$\Leftrightarrow 3n + 1{,}96\sqrt{n} \le 335$

$\Leftrightarrow 3n + 1{,}96\sqrt{n} - 335 \le 0$; ersetze n durch x^2

$\Leftrightarrow 3x^2 + 1{,}96x - 335 \le 0 \quad | :3$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1{,}96x}{3} - \frac{335}{3} \le 0 \quad | \text{PQ}$

$x_{1,2} = -0{,}32\overline{6} \pm \sqrt{0{,}1067\overline{1} + \frac{335}{3}}$

$\Rightarrow x_1 \approx -10{,}898... \quad , \quad x_2 \approx 10{,}245...$

ersetze nun x^2 durch n, woraus folgt:

$n \approx 104{,}97...$

gesamte Rechnung richtig, leider aber der kleine Fehler

Also darf n höchstens < 105 betragen, damit die Bedingung $\mathbb{P}(X > 100) \le 0{,}025$ eingehalten bleibt.

$+ \cancel{2{,}5/4}$

→ sorry, mein Fehler!

Aufgabe wurde geändert ... $+ 4/4$

Sehr gut!