395 • Gegeben: $Z_1 \sim N(1,1)$, $Z_2 \sim N(2,4)$, $Z_3 \sim N(3,9)$

$X := Z_1 - 2Z_2 + 3Z_3$, $Y := 3Z_1 - Z_2 - 3Z_3$

Gesucht: K_{XY}, β_1, β_0, $E[X]$, $E[Y]$, σ_X^2, σ_Y^2

$$E[X] = E[Z_1] - 2E[Z_2] + 3E[Z_3]$$
$$= 1 - 4 + 9 = 6 \checkmark$$

$$E[Y] = 3E[Z_1] - E[Z_2] - 3E[Z_3]$$
$$= 3 - 2 - 9 = -8 \checkmark$$

$$\sigma_X^2 = Var[Z_1 - 2Z_2 + 3Z_3] = Var[Z_1] + 4\,Var[Z_2] + 9\,Var[Z_3]$$
$$= 1 + 16 + 81 = 98 \checkmark$$

$$\sigma_Y^2 = Var[3Z_1 - Z_2 - 3Z_3] = 9\,Var[Z_1] + Var[Z_2] + 9\,Var[Z_3]$$
$$= 9 + 4 + 81$$
$$= 94 \checkmark$$

$$cov(X,Y) = cov((Z_1 - 2Z_2 + 3Z_3), (3Z_1 - Z_2 - 3Z_3))$$
$$= 3var(X_1) - cov(Z_1,Z_2) - 3cov(Z_1,Z_3)$$
$$- 6cov(Z_2,Z_1) + 2var(Z_2) + 6cov(Z_2,Z_3)$$
$$- 9var(Z_3) - 3cov(Z_3,Z_2) + 9cov(Z_1,Z_3)$$
$$= 3\cdot 1 - 0 - 3\cdot 0 - 6\cdot 0 + 2\cdot 4 + 6\cdot 0 + 9\cdot 0 - 3\cdot 0 - 9\cdot 9$$
$$= -70 \checkmark$$

$$K_{X,Y} = \frac{-70}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{94}} = -\frac{5}{\sqrt{47}}$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{94}} \cdot -\frac{5}{\sqrt{47}} = -\frac{5}{7}$$

$$\beta_0 = -8 + \frac{5}{7}\cdot 6 = -\frac{26}{7} = -3\tfrac{5}{7} \checkmark$$

Für diese Summanden wird $E[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$ minimal

Super!

+6/6

405 i)

	b	c	d
1	0α	0.6α	0.4α
2	0.3α	0.2α	0.5α
3	$0{,}6\alpha$	0.3α	0.1α

mit $\alpha = 1/3 = \rho(a)$ mit $a \in \{1,2,3\}$

uniform verteilte ZVe

→ warum? Erklärung!

wobei $\rho(b) = 1/3\,(0 + 0{,}3 + 0{,}6) = 3/10$ ✓

$\rho(c) = 1/3\,(0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}3) = 11/30$ ✓

$\rho(d) = 1/3\,(0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}1) = 1/3$ ✓

+ 1/1,5

ii)

Aus $P(a_2, a_1) \cdot \rho(a_2) = \mu(a_1, a_2)$ folgt:

$$P(a_2, a_1) = \frac{\mu(a_1, a_2)}{\rho(a_2)}$$

	1	2	3
b	0	$1/3$	$2/3$
c	$6/11$	$2/11$	$3/11$
d	$2/5$	$1/2$	$1/10$

✓ ✓ ✓ + 1,5

iii) $\mathbb{E}[X]$ (gegeben $X_2 = b$) $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2/3 = 2\,2/3$ ✓

$\mathbb{E}_c(X_1)$ $\mathbb{E}[X]$ (gegeben $X_2 = c$) $= 1 \cdot 6/11 + 2 \cdot 2/11 + 3 \cdot 3/11 = 1\,8/11$ ✓

$\mathbb{E}_d(X_1)$ $\mathbb{E}[X]$ (gegeben $X_2 = d$) $= 1 \cdot 2/5 + 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/10 = 1\,7/10$ ✓

+ 1,5

iv) $\mathbb{E}[(X_1 - h(X_2))^2]$ wird minimal für

$$h(X_2) = \mathbb{E}_{X_2}[X_1]$$ → warum? :)

Diese Werte dafür wurden in iii) berechnet.

$$\Rightarrow h(x) := \begin{cases} 2\,2/3, & \text{falls } X_2 = b \\ 1\,8/11 & \text{falls } X_2 = c \\ 1\,7/10 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ja. + 0,5/1,5