Σ 35

1) a) $f(n) = \begin{cases} 1000 & \text{, falls } n=1 \\ n \cdot 256 + f(n-1) & \text{, sonst} \end{cases}$

$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=1 \\ 2 \cdot g(n-1) & \text{, sonst} \end{cases}$

10P.

b) I Anfang, Rekursionsanfang für $n=1$, Sonderfall

LS: $f(1) = 1000$

RS: $744 + 128(1^2+1) = 1000$ ✓

Für das kleinste n $(n=2)$

LS: $f(2) = 2 \cdot 256 + 1000 = 1512$

RS: $744 + 128(2^2+2) = 1512$ ✓

I Annahme: Es gelte auch für $n+1$, da es für ein n gilt.

Beweis: $(n+1) \cdot 256 + \underbrace{f((n+1)-1)}_{(IA)} = 744 + 128((n+1)^2 + (n+1))$

$\Rightarrow 256n + 256$

$\Rightarrow 256n + 256 + 744 + 128(n^2+n)$

$\Rightarrow 128(2n+2) + 744 + 128(n^2+n)$

$\Rightarrow 128(2n+2+n^2+n) + 744$

$\Rightarrow 128(n^2+3n+2) + 744$

$\Rightarrow 744 + 128((n+1)^2 + (n+1)) = RS$ $\square$

I Anfang, Rekursionsanfang für $n=1$, Sonderfall

LS: $g(n) = 1$

RS: $2^{1-1} = 2^0 = 1$ ✓

Für das kleinste n $(n=2)$

LS: $g(2) = 2 \cdot g(1) = 2$

RS: $2^{2-1} = 2$ ✓

I Annahme: Es gelte auch für $n+1$, da es für ein n gilt.

3)

LS: $g(n+1) = 2 \cdot \underbrace{g((n+1)-1)}$

$\Rightarrow 2 \cdot \quad (IA)$

$\Rightarrow 2 \cdot \quad 2^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 2^n$

RS: $2^{(n+1)-1}$

$\Rightarrow 2^n = LS$ $\square$ ✓

10 P.

c) Ausprobieren liefert: Für $n = 17$ gilt $f(n) \leq g(n)$

I Anfang für $n = 17$

$f(17) = 744 + 128\,(17^2 + 17)$

$= 39912$

$g(17) = 2^{17-1} = 2^{16} = 65536$ $\qquad f(17) \leq g(17)$ ✓ ✓

I Annahme: Es gelte auch für $n+1$, da es für ein n gilt.

$2^{n-1} \geq 744 + 128\,(n^2 + n)$

Beweis: $2^{(n+1)-1} \geq 744 + 128\,((n+1)^2 + (n+1))$

$\Rightarrow 2 \cdot \underbrace{2^{n-1}}_{(IA)} \geq 744 + 128\,((n+1)^2 + (n+1))$

$\Rightarrow 2 \cdot (744 + 128\,(n^2 + n)) \geq 744 + 128\,((n+1)^2 + (n+1))$ $\square$

Die linke Seite ist deutlich größer als die rechte Seite ✓

9 P.

d) Die Oma hat das bessere Geschäft gemacht, so lange sie vor dem 17. Monat kündigt. Ab dann müsste sie Differenzen zahlen. ✓

1 P.

$\boxed{30/30 P.}$

3) Beweis durch Kontraposition.

Annahme: $(X \setminus Y) \subseteq Z \rightarrow (X \setminus Z) \not\subseteq Y$

Sei a beliebig in $(X \setminus Z)$.

$\Rightarrow a \in X$, $a \notin Z$

$\Rightarrow a \in X \setminus Y$, was nach Annahme eine Teilmenge von Z ist

$\Rightarrow a \in Z$, da $(X \setminus Y) \subseteq Z$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu $a \in (X \setminus Z)$ $\lightning$ $\square$ f $\boxed{0/2 P.}$

4) Wenn $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ nicht abzählbar ist, gibt es keine surj. Funktion von $\mathbb{N}$ nach $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Beweis durch Kontraposition: Angenommen, $f: \mathbb{N} \to Abb(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ sei surjektiv. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$ ✡

Klar: $M \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Da f surj. ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben, sodass gilt: $f(m) = M$

Klar: Entweder gilt $m \in M$ oder $m \notin M$.

Fall 1: $m \notin M$

Wegen $f(m) = M$ gilt also $m \notin f(m)$

Gemäß ✡ für $n = m$ folgt, dass $m \in M$ $\lightning$ (Widerspruch zu $m \notin M$)

Fall 2: $m \in M$

Wegen $f(m) = M$ gilt also $m \in f(m)$.

Gemäß ✡ für $n := m$ folgt, dass $m \notin M$ $\lightning$ (Widerspruch zu $m \in M$)

Da beide Fälle zu einem Widerspruch führen, war wohl die Annahme der Existenz einer surj. Funktion von $\mathbb{N}$ nach $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ falsch $\square$

eins zu eins aus dem Skript!

$\wedge$ Gemäß 2.46, Dismat-Script Seite 48. $\boxed{0/2 P.}$

2b) Anhand des Ausschnitts der Wahrheitstabelle ist zu sehen, dass $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ kein Implikant von φ_4 ist.

x_1	x_2	x_3	x_4	φ_3: $x_1 \overset{0}{\vee} x_2 \overset{0}{\vee} x_3$	φ_4: $x_1 \overset{0}{\vee} x_2 \overset{0}{\vee} x_3 \overset{0}{\vee} x_4$
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0

$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ ist ~~kein~~ nicht Implikant von φ_4, da der Wahrheitswert von x_4 unerheblich ist.

5 P.