1ai) $X_B^0 = (1, 0)$ Σ 74

$$X_B^3 = \left(\left(\left((1,0)\cdot\begin{pmatrix}5/8 & 3/8\\ 3/8 & 5/8\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}5/8 & 3/8\\ 3/8 & 5/8\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5/8 & 3/8\\ 3/8 & 5/8\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{65}{128}, \frac{63}{128}\right) \checkmark$$

4P.

aii) z.z.: $X_B^{(k)} = \left(\frac{1}{2}(1+4^{-k}), \frac{1}{2}(1-4^{-k})\right)$

I Anfang: für $k = 0$ $k \in \mathbb{N}$

LS: $X_B^{(0)} = (1, 0)$

RS: $\left(\frac{1}{2}(1+4^{-0}), \frac{1}{2}(1-4^{-0})\right) = (1,0)$ $\checkmark$ $\checkmark$

I Annahme: Die Gleichung gilt für ein $k \in \mathbb{N}$

I Behauptung: Die Gleichung gilt für $k+1$

Beweis: $\underbrace{X_B^{(k)} \cdot P_B}_{LS} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1+4^{-k+1}), \frac{1}{2}(1-4^{-k+1})\right)}_{RS}$

LS: $X_B^{(k)} \cdot P_B$

$\overset{\text{I Annahme}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{2}(1+4^{-k}), \frac{1}{2}(1-4^{-k})\right) \cdot P_B$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(1+4^{-k}), \frac{1}{2}(1-4^{-k})\right) \cdot \begin{pmatrix}5/8 & 3/8\\ 3/8 & 5/8\end{pmatrix}$

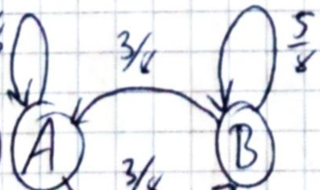
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{16}(1+4^{-k}) + \frac{3}{16}(1-4^{-k}), \frac{3}{16}(1+4^{-k}) + \left(\frac{5}{16}(1-4^{-k}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{5}{16}\cdot 1 + \frac{5}{16}\cdot 4^{-k}\right) + \left(\frac{3}{16}\cdot 1 - \frac{3}{16}\cdot 4^{-k}\right), \left(\frac{3}{16}\cdot 1 + \frac{3}{16}\cdot 4^{-k}\right) + \left(\frac{5}{16}\cdot 1 - \frac{5}{16}\cdot 4^{-k}\right.\right.$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{16}\cdot 4^{-k}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} - 4^{-k}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(1+4^{-k+1}), \frac{1}{2}(1-4^{-k+1})\right)$ $\square$ $\checkmark$ 10P.

aiii) $G_B := (V_B, E_B)$



$V_B := \{A, B\}$

$E_B := \{(A,A), (A,B), (B,A), (B,B)\}$

G_B beschreibt die möglichen Zustände mit A ist ein tolles Geschenk, B ist ein Stück Kohle.

G_B ist ein gerichteter Graph, stark zusammenhängend, irreduzibel und aperiodisch.
Man kann von A aus alle Knoten des Graphen G_B erreichen, gleiches gilt für B.
G_B ist aperiodisch, da man von Knoten A über die Kante (A, A) zu A zurück kommt und der Weg eine Länge von 1 hat.
Gleiches gilt für Knoten B und Kante (B, B).
In einer beliebigen Menge der natürlichen Zahlen, in der die 1 vorkommt ist das kleinste gemeinsame Vielfache stehts die 1.
Daher ist G_B aperiodisch (Länge von (A,A) und (B,B) ist 1)
Daraus folgt: Die Markov-Kette mit P_B ist ergodisch. $\lim_{k\to\infty} X_B^{(k)} = (1/2, 1/2)$

✓ 4P.

bi) Zu zeigen: $X_A = X_A \cdot P_A$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

✓ 4P.

bii) Analog zu G_B ist auch G_A gerichtet, stark zusammenhängend, irreduzibel und aperiodisch. Daraus folgt, dass die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix P_A ergodisch ist.

✓

$\lim_{k\to\infty} X_A^{(k)} = (5/12, 5/12)$ (?!)

4P.

biii) Für $X_B := (1/2, 1/2)$ gilt $X_B \cdot P_B = X_B$, denn

$$\begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

✓ 4P.

$\boxed{30/30P.}$

2a) $PR_1 = \frac{1-1/2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{PR_2}{2} + \frac{PR_3}{1}\right)$ ✓

$PR_2 = \frac{1-1/2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{PR_1}{2}\right)$ ✓

$PR_3 = \frac{1-1/2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{PR_2}{2} + \frac{PR_1}{2}\right)$ ✓

$PR_4 = \frac{1-1/2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{PR_4}{1}\right)$ ✓

$PR_1 = \frac{1}{8} + \frac{PR_2}{4} + \frac{PR_3}{2}$ $\qquad -1/8 = \frac{PR_2}{4} + \frac{PR_3}{2} - PR_1$

$PR_2 = 1/8 + \frac{PR_1}{4}$ $\qquad -1/8 = \frac{PR_1}{4} - PR_2$

$PR_3 = 1/8 + \frac{PR_2}{4} + \frac{PR}{4}$ $\qquad -1/8 = \frac{PR_2}{4} + \frac{PR_1}{4} - PR_3$

$PR_4 = 1/8 + \frac{PR_4}{2}$ $\qquad -1/8 = -\frac{PR_4}{2}$

PR_1	PR_2	PR_3	PR_4	
-1	0,25	0,5	0	-0,125
0,25	-1	0	0	-0,125
0,25	0,25	-1	0	-0,125
0	0	0	-0,5	-0,125

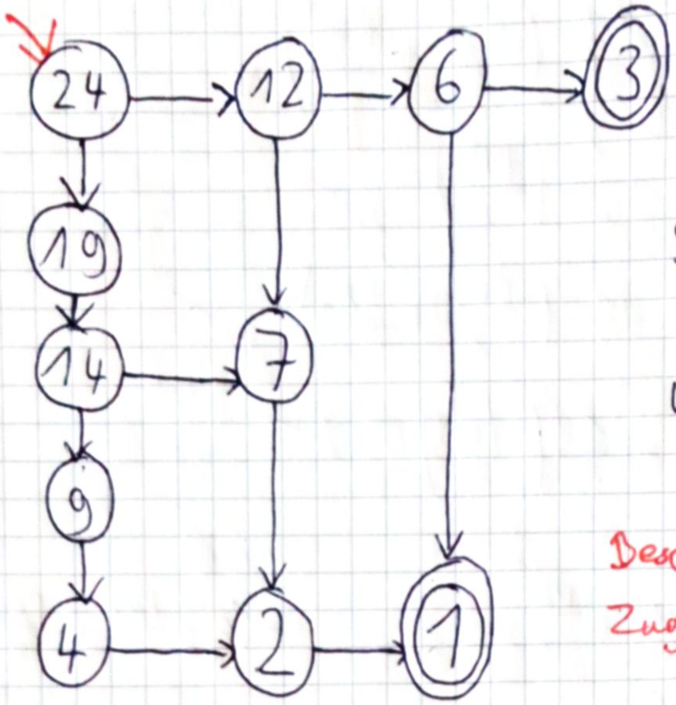
$\Rightarrow PR_1 = 3/10$ ✓, $PR_2 = 1/5$ ✓, $PR_3 = 1/4$ ✓, $PR_4 = 1/4$ ✓ $\quad$ 6P.

b) $P_d(G) := \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 5/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 5/8 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad$ 4P. $\quad$ 17P.

c) $X^0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ $\quad X^1 = X^0 \cdot P_d(G) = (5/16, 3/16, 1/4, 1/4)$ ✓

$X^2 = X^1 \cdot P_d(G) = (19/64, 13/64, 1/4, 1/4)$ ✓ $X^3 = X^2 \cdot P = (77/256, 51/256, 1/4, 1/4)$ ✓

4a) Transitionssystem:



Senkrechter Pfeil: nimm 5
Waagerechter Pfeil: halbiere

Beschriften wer am Zug bzw. gewonnen hat!

11P.

b) Wenn Alice halbiert, hat Bob die Möglichkeit zu gewinnen, indem er 5 abzieht. Halbiert aber Bob auf 6 runter, hat Alice in jedem Fall gewonnen.
Alice sollte lieber 5 abziehen, sodass 19 für Bob übrig bleiben, es ergibt sich folgende Gewinnstrategie: ✓ 2P.

c) Wenn Alice 5 abzieht, muss Bob 5 von den 19 abziehen, Alice halbiert die verbliebenen 14 und Bob muss 5 abziehen, sodass Alice die restlichen 2 halbieren kann. Sie gewinnt. ✓ 4P.

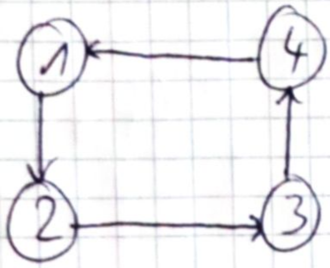
d) Bob hat nur eine Gewinnstrategie wenn Alice die 24 halbiert, dann zieht er 5 ab und Alice muss von den verbleibenden 7 auch 5 abziehen. Bob halbiert die restlichen 2 und gewinnt.
Ansonsten muss, wenn Alice 5 abzieht, er hoffen, dass Alice die verbleibenden 14 nicht halbiert (nachdem Bob gezwungen wurde von 19 5 abzuziehen). Wenn Alice 5 von den 14 abzieht, muss Bob 5 abziehen, es bleiben 4, die zuerst Alice und dann Bob halbiert. Bob gewinnt. 2P.

19/20P.

2d) $G' = (V', E')$

$E := \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$

$V' := \{1,2,3,4\}$



$P_d(G') = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, damit gilt:

$(1/4, 1/4, 1/4, 1/4) \cdot P_d(G') = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

$\rightarrow X^{(0)} \cdot P_d(G') = X^{(0)}$