11.1) $f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$
$f'''(x) = -\cos(x)$ ✓

$$\sin(x) = 0 \cdot \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} - 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$Tf(x) = x \cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} \dots$$ ✓

4/4

11.2) a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$$

$$T_3 f(x) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^1}{1!} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3!}$$ ✓

b) $T_3 f(0,2) = 1 + \frac{1}{2} \frac{0,2}{1} - \frac{1}{4} \frac{0,2^2}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,2^3}{6}$

$= 1,0955$ ✓

c) $1,0955445115$ ✓

4/4

11.3) $f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$ etc.

$$x^2 + 1 \cdot 1 + 2x \cdot \frac{x^1}{1} + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} = x^2 + 1 + 2x^2 + x^2$$

$$= 4x^2 + 1$$

$$n = 0: \quad 1 + 2\frac{x^2}{2!} = \underline{1 + x^2}$$ ✓

$n=1$: $x \to x$ ~~1~~

$$2 \cdot \frac{(x-1)^0}{0!} + 2 \cdot \frac{(x-1)^1}{1!} + 2 \cdot \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$= 2 + 2\frac{x-1}{1} + 2\frac{x^2-2x+1}{2}$$

$$= \underline{x^2+1}$$ ✓

Beobachtung: Begrenzt differenzierbare Funktionen ergeben als Taylorreihe das Polynom selbst. Die Genauigkeit ist maximal. Dementsprechend ergeben verschiedene Entwicklungspunkte das selbe. ✓

3/3

11.4) $f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$ etc

1. $T_3 f(x) = 1 \cdot 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

$T_3 f(0{,}1) = 1{,}1051\overline{6}$ ✓

2. $e^{\vartheta} \cdot \frac{(0{,}1)^4}{4!}$ für $\vartheta \in [0, 0{,}1]$

$$e^{\vartheta} \cdot \frac{(0{,}1)^4}{4!} \leq e^{0{,}1} \cdot \frac{(0{,}1)^4}{4!} \quad \text{weil } e^{\vartheta} \leq e^{0{,}1}$$

$$\leq e^1 \cdot \frac{(0{,}1)^4}{4!} \quad \text{weil } e^{0{,}1} \leq e^1$$

$$\leq \cancel{3} \cdot \frac{0{,}0001}{4 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow e^{\vartheta}\frac{(0{,}1)^4}{4!} \leq 0{,}0001 \cdot \frac{1}{8}$$

$= 0{,}0000125$ ✓

3. $1{,}105170918$ ✓

Bonus: $n = 7$ 6

$$e^{\vartheta} \cdot \frac{(0{,}1)^7}{7!} \leq 3 \cdot \frac{(0{,}1)^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \approx 5{,}95 \cdot 10^{-11}$$

$(n+1)!$

4,5/3

Σ: 15,5/14