Aufgabe 2.1

$$2^{|A|} = RS$$
$$|P(A)| = LS$$

I Anfang: Für $n=1$

$LS = |P(\{a_1\})|$
$= |\{\emptyset, \{a_1\}\}|$
$= 2$

$n=0?$ (-0,5)

$RS = 2^{|1|}$
$= 2$

$LS = RS$ ✓ ✓

~~I Schritt: $n \to n+1$~~

• I Annahme: $n \geq 1$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$
$\hookrightarrow |P(A)| = 2^{|A|}$ für $A_n = \{a_1, \dots a_n\}$

I Behauptung: Dann gelte auch
$|P(A)| = 2^{|A|}$ für $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$

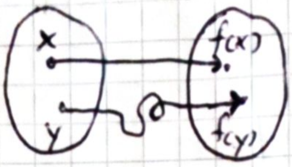
Beweis: Sei D eine Menge. $D := P(A_n)$
Sei B eine Menge. $B := P(A_n \cup \{a_{n+1}\}) \setminus D$
Sei $f: D \to B \quad x \longmapsto x \cup \{a_{n+1}\}$
D ist die Potenzmenge von A_n, wobei B diejenige Menge aller Teilmengen von A_{n+1} ist, die nicht die Teilmengen A_n enthält. D ist also disjunkt zu B. Werden diese vereinigt, so kommen keine Elemente doppelt vor. Sollten D und B ~~gleich mächtig~~ bijektiv sein, so ist D vereinigt mit B doppelt so mächtig wie D. ✓

Beweis zur Bijektivität:

1. Injektivität, direkter Beweis

Sei $x, y \in D$ beliebig, mit $x \neq y$

z.z. $f(x) \neq f(y)$



$$f(x) = x \cup \{a_{n+1}\}$$
$$f(y) = y \cup \{a_{n+1}\}$$

$$x \cup \{a_{n+1}\} \neq y \cup \{a_{n+1}\}$$

Surjektivität, jedes $f(y)$ hat ein eindeutiges x, das nur von $f(y)$ genau ein mal getroffen wird.

Da beides gilt, ist die Funktion $A \to B$ bijektiv.

Nun sind die Mengen A und B disjunkt und gleich mächtig, das heißt A verbunden B ist doppelt so groß wie A alleine.

Nach Induktionsbehauptung ist $|P(A_n)| = 2^{|n|}$.

$|P(A_{n+1})|$ ist also doppelt so groß wie $|P(A_n)|$.

Es gilt also:

$$|P(A_{n+1})| = 2 \cdot (2^{|n|})$$
$$= 2^{n+1} \quad \square$$

3,5/4

2.2 Damit $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, muss folgendes gelten:

- Kommutativgesetz: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \\ y_3+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \checkmark$$

- Assoziativgesetz: Sei $\vec{z} \in G$

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$$

Beweis?

- Existenz eines neutralen Elements e:

$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓, denn $\vec{x} \oplus e = \vec{x}$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Beweis

- Existenz eines inversen Elements $\overline{\vec{x}}$:

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{b} \qquad | \oplus \overline{\vec{x}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\vec{x}} \oplus (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \overline{\vec{x}} \oplus \vec{b}$$

$$\overset{\text{Asso.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{(\overline{\vec{x}} \oplus \vec{x})}_{e} \oplus \vec{y} = \overline{\vec{x}} \oplus \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow e \oplus \vec{y} = \overline{\vec{x}} \oplus \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = \overline{\vec{x}} \oplus \vec{b}$$

- Abgeschlossenheit:

$\vec{x}, \vec{y} \in G$

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \in G \checkmark$$

2/4

2.3

$\odot_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Beispielhaft (beliebig) lässt sich anhand de Tabelle zeigen:

Kommutativgesetz: $3 \odot_7 2 = 6$

$2 \odot_7 3 = 6$ ✓

Assoziativgesetz: $2 \odot_7 (5 \odot_7 3) = 2 \odot_7 1 = 2$

$(2 \odot_7 5) \odot_7 3 = 3 \odot_7 3 = 2$

Existenz eines neutralen Elements:

$e = 1$, denn e verändert die erste Spalte / Zeile nicht. $1 \odot_7 1 = 1$ ... $6 \odot_7 1 = 6$ ✓

Existenz eines inversen Elements:

Gemäß Tabelle: für $x = 1$: $\bar{x} = 1$

$x = 2$: $\bar{x} = 4$

....

Abgeschlossenheit: $5 \odot_7 4 = 6$; $6 \in G$

$1{,}5 / 4$

Beispiele sind keine Beweise!

2.4 a) Das neutrale Element ist d

b) Für alle Elemente existierten jeweils das folgende inverse Element:

$a \rightarrow h$, $b \rightarrow b$, $c \rightarrow g$, $d \rightarrow d$,

$g \rightarrow c$, $h \rightarrow a$

c) ~~Es existiert genau ein neutrales Element, zu jedem Element existiert ein inverses.~~

~~Das Assoziativgesetz gilt.~~

Die Gruppe G ist abelsch, genau dann, wenn

$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$. Trifft zu, siehe Tabelle.

Dies nennt sich Symmetrie.

d) $(a \circ b) \circ c = g \circ c = d$

$a \circ (b \circ c) = a \circ h = d$

e) $a^2 = a \circ a = c$

$b \circ b = d$

$c \circ c = g$

$d \circ d = d$

$g \circ g = c$

$h \circ h = g$

f) 5, denn $a \circ a \circ a \circ a \circ a = c \circ a \circ a \circ a \circ a = b \circ a \circ a \circ a$

$= g \circ a \circ a \qquad = h \circ a = d$

g) 3, denn $c \circ c \circ c = g \circ c = d$

4/4

Σ: 17/16