3.1 a) (G1) Seien m_1 und m_2 Element von einen Paar $G(\{0,1,\dots,m-1\},\oplus_m)$, wobei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$m_1 \oplus m_2 = m_3$, wobei m_3 immer noch Element von ~~G~~ $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ bleibt.

(G2) ist als bewiesen vorausgesetzt.

* In dieser Gruppe

(G3) Sei e das neutrale Element. $e = 0$

Sei $x \notin \{0,1,\dots,m-1\}$

$e \oplus_m x$ = Rest von $0+x$ beim Teilen durch m $\Rightarrow$ Rest von x beim Teilen durch m

(G4) Für alle $x \in G$ gelte:

Es existiert ein $y \in G$, sodass gilt:

$x \oplus_m y = e$, wobei $y = -x$

Zu jedem x ist $-x$ das inverse Element.

(G5) $m_1 \oplus_m m_2 = m_2 \oplus_m m_1$

G3, G4 sind auf Seite 3

b) Das Paar $P(\{0,1,\dots m-1\}, \odot_m)$ für $m=12$ ist keine Gruppe, da es kein Element im Paar gibt, das das inverse Element zur 0 ist.

$\nexists\, x \in P : x \odot_m 0 = e$ für $m=12$

c) Das Paar $P := (\{1,\dots,m-1\}, \odot_m)$ ist keine Gruppe, da es kein Element im Paar gibt, das das inverse Element zur 2 ist.

$\nexists\, x \in P: x \odot_m 2 = e.$

Wenn m eine Primzahl wäre, würde dieses Problem nicht auftreten.

Seite 2 3/5

3.2 a) Es ist eine surjektive Funktion, da alle b getroffen werden, jedoch a_1 und a_3 beide auf b_2 zeigen. ↯ inj., bij. -0,5
0,5

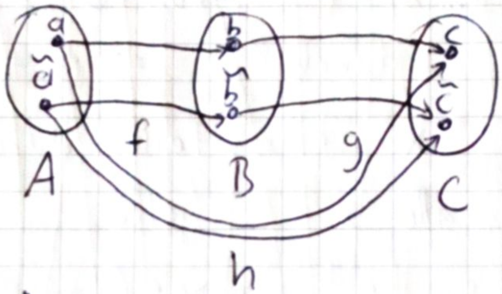
1 b) Es ist keine Funktion, da a_3 auf b_1 und b_4 zeigt.

0,5 c) Es ist eine injekte Funktion, da kein a auf b_5 zeigt.

0,25 d) Es ist eine injektive Funktion, da kein b auf a_3 zeigt.

0,75 e) Es ist eine bijektive Funktion, alle b werden von exakt einem a getroffen. umgekehrt?

3.3 4/4



Laut Aufgabenstellung ist $h(a) = g(f(a))$, wobei f und g bereits als bijektiv vorausgesetzt sind. f und g sind also injektiv und surjektiv.

Zu zeigen: $h(a)$ ist bijektiv.

$\boxed{\text{Injektiv}}$ 2 beliebige Werte a und ã haben 2 verschiedene Zuordnungen.

$a \neq \tilde{a}$ und $h(a) \neq h(\tilde{a})$

$a \neq \tilde{a} \Rightarrow f(a) \neq f(\tilde{a})$ | f ist injektiv

$\Rightarrow g(f(a)) \neq g(f(\tilde{a}))$ | g ist auch injektiv

$\Rightarrow h(a) \neq h(\tilde{a})$ | nach DEF von $h(x) = g(f(x))$

h(a) ist injektiv

$\boxed{\text{Surjektiv}}$ Sei $c \in C$ beliebig

g ist surjektiv, daraus folgt, dass ein $b \in B$ existiert, für das gilt $g(b) = c$ ⊗⊗

f ist surjektiv, daraus folgt, dass ein $a \in A$ existiert, für das gilt $f(a) = b$ ⊗

→ Seite 4!

(G3) Sei $m_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und e ein neutrales Element,

0/2

so gilt: soll für alle Verknüpfungen gelten!

inverse?

$m_1 \oplus_m e = m_1 \oplus (\overline{m}_1 \oplus_m m_1) = (\overline{m}_1 \oplus_m m_1) \oplus_m m_1 = e \oplus_m m_1 = m_1$

Es gibt für jedes m_1 in der Gruppe genau EIN e:

das hier ist zielmäßig sehr unklar

Sei $\hat{e}$ ein zweites neutrales Element:

$\hat{e} = e \oplus_m \hat{e} = e$

(G4) 0 Sei $\widetilde{m}_1 = (m_1^{-1})^{-1}$, wobei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

mit $\widetilde{m}_1 \oplus_m \overline{m}_1 = e$, dann gilt:

$m_1 \oplus_m \overline{m}_1 = e \oplus_m m_1 \oplus_m \overline{m}_1$

Bitte schreib deine Ziele $= \widetilde{m}_1 \oplus_m \overline{m}_1 \oplus_m m_1 \oplus_m \overline{m}_1$

hin, was willst du erreichen? $= \widetilde{m}_1 \oplus_m e \oplus_m \overline{m}_1$

$= \widetilde{m}_1 \oplus_m \overline{m}_1$

$= e$

Es gibt genau ein inverses Element für jedes $m_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ↯ nein

Sei $\hat{m}_1$ ein zweites inverses Element.

So gilt: $\hat{m}_1 = \overline{m}_1$

$\hat{m}_1 = \hat{m}_1 \oplus_m e$

$= \hat{m}_1 \oplus_m (m_1 \oplus_m \overline{m}_1)$

$= (\hat{m}_1 \oplus_m m_1) \oplus \overline{m}_1$

$= e \oplus_m \overline{m}_1$

$= \overline{m}_1$

Du sollst eine Funktion definieren, die die Verknüpfungsfunktion immer invertiert

Es folgt: $h(a) = g(f(a)) \overset{*}{=} g(b) \overset{**}{=} c$

$g(f(a))$ ist surjektiv

$g(b)$ ist surjektiv

$\Rightarrow h(a)$ ist surjektiv

$\Rightarrow h(a)$ ist bijektiv

1/4

3.4 Seien $f, g \in B$

1 $f \circ g = f(g(x))$

da f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ebenso wie g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet folgt $f(g(x)) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Also bildet $f(g(x))$ auch von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ab.

Nach Wissen von 3.3 gilt mit

$A = B = C = \mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto b$ bijektiv

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \mapsto c$ bijektiv

so folgt: $f \circ g$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto c$ bijektiv

X ϟ Assoziativität

3.5 $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ Menge der geraden Zahlen

2/2 $Q := \{q^2 : q \in \mathbb{Z}\}$ Menge der Quadratzahlen

$f: G \to Q$ Funktion f von G nach Q

$x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$ x wird abgebildet auf $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Um zu zeigen, dass G und Q gleich mächtig sind, muss eine bijektive Abbildung gefunden werden.

Die Abbildung f muss injektiv & surjektiv sein

$\boxed{\text{Injektiv}}$ Seien n_1 und n_2 beliebige Elemente von G, wobei gilt: $n_1 \neq n_2$.

Es muss gelten: $f(n_1) \neq f(n_2)$

$$\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 \neq \left(\frac{n_2}{2}\right)^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$n_1 \neq n_2$$

✓ f ist injektiv

$\boxed{\text{Surjektiv}}$ Sei $q \in Q$ beliebig

Wenn f surjektiv ist, dann muss es ein beliebiges n geben, für das gilt: $f(n) = q$

$$f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Jede Zahl der Form $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ist eine Quadratzahl und somit Element von Q, da dies die Menge aller Quadratzahlen ist.