4.1/a) 2/2 Diese Menge ist nicht linear unabhängig.

$(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1$

Somit ist $\{1, x^2, (x+1)\cdot(x-1)\}$

$\hat{=} \{1, x^2, x^2-1\}$

$(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot x^2 + 1\cdot(x^2-1) = 0$ ✓

Die Null sollte nur trivial gebildet werden können, sofern die Menge lin. un. ist. Dies ist hier nicht der Fall. ✓

4.1/b) Diese Menge ist nicht lin. un.

$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ✓

$=0$

Gleiche Begründung (siehe 4.1/a))

4.2) 1/4 Wenn w_1 und w_2 lin. un. sind, dann können sie nur auf eine Art kombiniert werden? ∞-viele

~~Da \ Va~~ Sei $w_1 = w_2$ Warum sind sie gleich?

$a_1\cdot v_1 + a_2\cdot v_2 = b_1\cdot v_1 + b_2\cdot v_2$

$\Leftrightarrow a_1\cdot v_1 + a_2\cdot v_2 - (b_1\cdot v_1 + b_2\cdot v_2) = 0 \quad | v_1, v_2$ ausklammern

$(a_1 - b_1)\cdot v_1 + (a_2 - b_2)\cdot v_2 = 0$ „weil v_1, v_2 linear unabh."

Nur lösbar für $(a_1 - b_1) = 0$, wenn

$a_1 = b_1$ bzw. $a_2 = b_2$

Somit können die Vektoren w_1, w_2 nur auf eine Weise kombiniert werden (für $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$) ↯

$\Rightarrow$ Sie sind lin. un.

Definition lineare unabh. lesen!

1/4

4.3a) $\mathbb{R}[x]_n$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$,

Somit ist $n=4$.

Basis von $\mathbb{R}[x]_n := \{1, x, x^2, \dots x^n\}$

Basis von $\mathbb{R}^{n+1} := \{x, x^2, \dots, x^{n+1}\}$

Somit gibt es die Abbildung:

$$f: \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

mit $a_0 + a_1 \cdot x + \dots a_n \cdot x^n \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$

~~Es gib~~ Abbildung ist bijektiv. Beweis? -1

Addition: sei $u = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$

$v = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_n \cdot x^n$

mit $a, b \in \mathbb{R}$; $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$

$u + v = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x^1 + (a_2 + b_2) \cdot x^2 + \dots + (a_n + b_n) \cdot x^n$

$f(u+v) = \cancel{u+v \cdot e}$

$(a_0 + b_0) \cdot e_0 + (a_1 + b_1) \cdot x^1 \cdot e_1 + \dots + (a_n + b_n) \cdot x^n \cdot e_n$

mit e_i = Einheitsvektor an Stelle i.

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_0 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Multpl.: sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$\cancel{\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f}$ $\quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot f(u) = \lambda \cdot u \cdot e_n$

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$

4.3(b) 0 Sei $\mathbb{R}[x]_3$ mit $p(5)=0$ UVR von $\mathbb{R}[x]_3$

So gilt: ① Addition von $\mathbb{R}[x]_3$ mit $p(5)=0$ bleibt in $\mathbb{R}[x]_3$

② Multp. " "

zu ①: sei $\vec{a} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(5)=0$

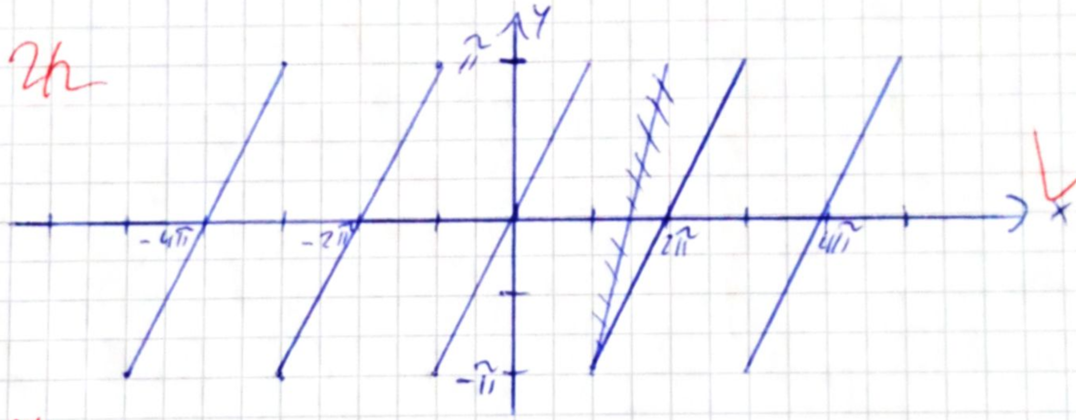
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]_3$

soll immer null sein, das beweisen

zu ②: $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

4.4.) 2P



4.5) 6/6 Aussage stimmt.

Funktion bildet VR über $\mathbb{R}$, somit muss $F_{2\pi}$ UVR von $\mathbb{R}$ sein.

① Addition: sei $f, g \in F_{2\pi}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x+2\pi) + g(x+2\pi)$

$= (f+g)(x+2\pi)$, somit ist $f+g$ 2-π-periodisch.

② Multiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x+2\pi)$, da $f \in F_{2\pi}$