5.1) z.z.: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für $x_0 = 1$

für $x_0 = 1$: $a + b + c = -d$ ✓0,5

Somit ist die Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\notin \mathbb{R}[x]_3$!!

(✓)0,5

Da d ~~unveränderbar~~ abhängig ist, lautet die Dimension: 3. Eine 4. Dimension ist mit diesen Vektoren nicht abbildbar. ✓

2/5

5.2) Da f linear ist, gilt ① $f(u+\tilde{u}) = f(u) + f(\tilde{u})$

und ② $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Da g linear ist, gilt ③ $g(u+\tilde{u}) = g(u) + g(\tilde{u})$

und ④ $g(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot g(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

zu zeigen: $g \circ f(u)$ ist linear.

$g \circ f(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition} \\ \text{von "}\circ\text{"}}}{=} g(f(u))$

Damit $g(f(u))$ linear ist, muss gelten:

1. $g(f(u+\tilde{u})) = g(f(u)) + g(f(\tilde{u}))$
2. $g(f(\lambda \cdot u)) = \lambda \cdot g(f(u))$

zu 1.

$g(f(u+\tilde{u})) \overset{①}{=} g(f(u) + f(\tilde{u})) \overset{③}{=} g(f(u)) + g(f(\tilde{u}))$ ✓

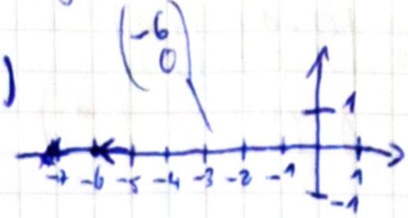
zu 2.

$g(f(\lambda \cdot u)) \overset{②}{=} g(\lambda \cdot f(u)) \overset{④}{=} \lambda \cdot g(f(u))$ ✓

4/4

~~5a)~~ 5.3/a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu 5.3 a)



✓

5.3 b) $A \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2a + 0b &= 2 &\Rightarrow a &= 1\\ 2c + 0d &= 2 &\Rightarrow c &= 1\\ 0a + 2b &= -2 &\Rightarrow b &= -1\\ 0c + 2d &= 2 &\Rightarrow d &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ✓

5.3 c) Die Matrix dreht den Vektor, mit dem sie multipliziert wird, um $45°$ gegen den Uhrzeigersinn. und streckt ihn um den Faktor $\sqrt{2}$ (✓)

3,5/4

5.4) a) $A = \left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$
$= \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$

$L1 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ✓

b) $L2 := f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\left(x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(y \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$= x \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} \Rightarrow x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = x \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$L2 := \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ✗

c) $L1 \circ L2$: $L1 \cdot L2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left(0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (v) Folgefehler

d) $L2 \circ L1$: $L2 \cdot L1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left(0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (v) Folgefehler

e) $L1 \circ L2$ beschreibt die Hintereinanderausführung von zuerst der Rotation um $90° (\frac{\pi}{2})$ gegen den Uhrzeigersinn, und danach der Spiegelung an der x-Achse.
$L2 \circ L1$ beschreibt die Hintereinanderausführung von zuerst der Spiegelung an der x-Achse, und danach der Rotation um $90° (\frac{\pi}{2})$ gegen den Uhrzeigersinn. f 3/5

5.5 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+0 & 2+4 \\ 1+-1 & 1+0 & 2+-2 \\ 1+0 & 1+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 4+2 & 0+0 \\ 2+-2 & 4+-1 & 0+0 \\ 2+0 & 4+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ 2/2

5.6) Die Aussage $A \cdot B = B \cdot A$ gilt nicht. Beweis:
Gegenbeispiel:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\neq$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ 2/2

5.7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ 2/2

Σ: 18,5/24