6.1) Eine Matrix D ist orthogonal, wenn $D \cdot D^T = I$

6.1/a) $A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \neq I$ ✓ Antwort

6.1/b) $B^T = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ✓ Antwort

6.1/c) $C^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ✓ Antwort 1,5/3

6.2/a) $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0$

$\langle \vec{v_1}, \vec{v_3} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) = 0$

$\langle \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0$ ✓

Da SKP ~~…~~ $= 0 \Rightarrow$ paarweise orthogonal. ✓

6.2/b) Diese Aussage stimmt offensichtlicherweise mit dem Wissen aus 6.2/a. Denn da alle ~~SKP~~ Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ paarweise orthogonal sind, sind sie auch linear unabhängig. Somit spannen sie zwingenderweise 3 Achsen auf, weshalb sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind. ✓

6.3/c) Eine Orthonormalbasis (ONB) muss: orthogonale Vektoren besitzen, welche alle die Länge 1 haben.

Dass die Vektoren orthogonal sind, wurde bereits bewiesen. ✓

Länge: $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$

$\neq 1$ ✓

Somit ist dies keine ONB. ✓

6.2 d) $A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

$\vec{w} := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ✓

3/4

6.3 a) $B := \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} \cdot 1/3$

Orthogonal wenn: $B \cdot B^T = I$

$B^T = \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix} \cdot 1/3$

$B \cdot B^T = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} \cdot 1/9$

$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$ ✓ ✓

Länge: $\|\vec{b_1}\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4+4+1} = 1$

$\|\vec{b_2}\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+4+4} = 1$

$\|\vec{b_3}\| = 1/3 \cdot \sqrt{4+1+4} = 1$ ✓

Somit ist B eine ONB. ✓ Vektoren paarweise orthogonal (-0,5)

6.3/b) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösbar mit : Gauss oder Taschenrechner :

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \underline{\underline{1}}$ ✓

6.3/c) Sei $B^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

und sei $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in B$ $\qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in \text{Spann}(B)$

und $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in$ ~~Basis~~ Spann$(\{e_1, e_2, e_3\})$

Somit gilt (offensichtlicherweise): Beweis?

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, weshalb

0 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ die Darstellung von $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

in B ist.

6.3/d) siehe Ende

6.4) N1) $\|\vec{x}\|_1 = 0$

$|x_1| + |x_2| + |x_3| = 0$

$\Leftrightarrow$ da Betrag, ist diese Gleichung nur

für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ lösbar

$0 + 0 + 0 = 0$ $\qquad$ z.z. $\vec{x} = 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|_1 = 0$

also: $\vec{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ✓0,5

N2) $\|\lambda \cdot \vec{x}\|_1 = |\lambda \cdot x_1| + |\lambda \cdot x_2| + |\lambda \cdot x_3|$

(-0,5) Def? was

$= |\lambda| \cdot |x_1| + |\lambda| \cdot |x_2| + |\lambda| \cdot |x_3|$

$= |\lambda| \cdot (|x_1| + |x_2| + |x_3|)$

$= |\lambda| \cdot \|x\|_1$ ✓

Def (-0,5)

N3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |x_3+y_3|$

$\leq (|x_1|+|y_1|) + (|x_2|+|y_2|) + (|x_3|+|y_3|)$

$\leq (|x_1|+|x_2|+|x_3|) + (|y_1|+|y_2|+|y_3|)$

$\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

1,5/3

6.5) $\vec{l}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ... etc.

Somit: $\left\{ k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\right.$

$\left. k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Sei $x_1 = k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

x_2, x_3, x_4 analog mit entsprechendem Einheitsvektor.

$ONB := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Gelten muss: - $\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = \|x_4\| = 0$

- Paarweise orthogonal

- bilden den Spann

$\langle x_1, x_2\rangle \mathrel{\hat=} \left\langle k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$(k-l)\cdot k + k\cdot(k-l) + k\cdot k + k\cdot k$

$= 4k^2 - 2kl$; analog mit x_2, x_3, x_4

1 $4k^2 - 2kl = 0$ ✓ Lösbar => orthogonal

$\|\vec{x}_1\| = \sqrt{k^2 - l^2 + k^2 + k^2 + k^2}$

0,5 $= \sqrt{4k^2 - l^2} = 2k - l = 1$

etc. etc. schaut euch die binomischen Regeln an!

+1,5/+4

6.3/d) $B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1/3$

$B^T := 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \cancel{1/3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \cancel{1/3}$ ✓

$\vec{w} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \cancel{1/3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

Zusammenhang: $\vec{w} = B \cdot B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

Wendet man beide Matrizen an wie in der obigen Rechnung, so kommt man wieder beim Ausgangsvektor raus.
Dies liegt daran, dass $B \cdot B^T = I$. ✓

2,5/4

Σ: 8,5/14