7.1a) $\|x\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ ✓

$$A \cdot \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ ✓

b1) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \|x\| \cdot \|A \cdot x\| \cdot \cos(\alpha)$

$-3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\alpha)$

$-3 = 5 \cdot \cos(\alpha) \quad |:5$

$-\frac{3}{5} = \cos(\alpha)$

$\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = \alpha$

$\alpha = 126{,}87^\circ$ ✓

Bogenmaß: 2,214

b2) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\alpha)$

$2\sqrt{5} = 5 \cdot \cos(\alpha) \quad |:5$

$\frac{2\sqrt{5}}{5} = \cos(\alpha)$

$\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \alpha$

$\alpha = 26{,}56^\circ$

Bogenmaß: 0,464 ✓

b3) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1} \cdot \cos(\alpha)$

$2 = \sqrt{5} \cdot \cos(\alpha) \quad |:\sqrt{5}$

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos(\alpha)$

$\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \alpha$

$\alpha = 26{,}56^\circ$

Bogenmaß: 0,464 ✓

c) Die Matrix A ~~ist orthogonal~~ dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ um $126{,}87^0$ (Bogenmaß 2,214) gegen den Uhrzeigersinn. Dabei bleibt die Länge des Vektors erhalten. ✓

5/5

7.2) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, es gilt $A \cdot A^T = I$ ✓ und $B \cdot B^T = I$ ✓

$$\Rightarrow (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T \overset{\text{Asso.}}{\underset{(*)}{=}} A \cdot (B \cdot B^T) \cdot A^T = A \cdot (I) \cdot A^T$$
$$= I \cdot A \cdot A^T = I \cdot I = I \checkmark$$

(*) mir fehlt: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (-0,5)

analog dazu B

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T \overset{\text{Asso}}{\underset{(*)}{=}} B \cdot (A \cdot A^T) B^T = B \cdot (I) \cdot B^T$$
$$= I \cdot B \cdot B^T = I \cdot I = I \checkmark$$

1,5/2

7.3) Orthogonale Matrizen sind invariant:

① Längenerhaltend ✓

② Winkelerhaltend ✓

zu ①: $(\| A \cdot b_1 \|)^2 = Ab_1 \cdot Ab_1 = b_1^T \cdot A^T \cdot A \cdot b_1$
$= b_1^T \cdot I \cdot b_1 = b_1^T \cdot b_1 = b_1 \cdot b_1$
$= (\| b_1 \|)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da Orthonormal-} \\ \text{basis}}}{=} 1$ ✓

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ A ist Längenerhaltend

zu ②: $\langle A \cdot b_1 , A \cdot b_2 \rangle = \| A \cdot b_1 \| \cdot \| A \cdot b_2 \| \cdot \cos(\alpha)$
$\overset{①}{=} \| b_1 \| \cdot \| b_2 \| \cdot \cos(\alpha)$ ✓
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da ONB}}}{=} 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$ ✓

$\Rightarrow$ A ist Winkelerhaltend ✓

2/2

7.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ist $A^T := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Wenn $A^T \cdot A = A \cdot A^T$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= a^2+c^2 \quad &| -a^2 \\ b^2 &= c^2 \quad &| \sqrt{} \\ b &= c \lor -b = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2+d^2 &= c^2+d^2 \quad &| -d^2 \\ b^2 &= c^2 \quad &| \sqrt{} \\ b &= c \lor b = -c \end{aligned}$$

$\Rightarrow b = c$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ ist symmetrisch

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$ab+cd = ac+bd$$

$$\overset{b=-c}{\Rightarrow} -ac+cd = ac-cd \quad | :c$$

$$-a+d = a-d \quad | +d \quad | +a$$

$$2d = 2a \quad | :2$$

$$d = a$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} d & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{c=-b}{\Rightarrow} A = \begin{pmatrix} d & b \\ -b & d \end{pmatrix}$ ist orthogonal

"⇐"-Richtung fehlt (-1)

3/4

7.5) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Gemäß Lemma 8.17:

$$\det(A) = \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{matrix} \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1$$

$$- 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= -3$$

$$\det(B) = \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{matrix} \quad 2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3$$

$$- 0 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 0$$

$$= 15$$

$\det(B \cdot A) = -45 = \det(B) \cdot \det(A)$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = -45$

$\det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 9$

$\det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = 225$

3/3

7.6) a) $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\qquad B := \begin{pmatrix} a & \alpha & x \\ b & \beta & y \\ c & \gamma & z \end{pmatrix}$ $\quad B^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix}$

zu zeigen: $\det(A) = \det(A^T)$

Gemäß Lemma 8.16 gilt:

$\det(A) = a \cdot d - c \cdot b$

$\det(A^T) = a \cdot d - c \cdot b \qquad \Rightarrow \det(A) = \det(A^T)$

zu zeigen $\det(B) = \det(B^T)$

Gemäß Lemma 8.17 gilt:

$$\det(B) = \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ a & \alpha & x & a & \alpha \\ b & \beta & y & b & \beta \\ c & \gamma & z & c & \gamma \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \cdot \beta \cdot z + \alpha \cdot y \cdot c + x \cdot b \cdot \gamma \\ - c \cdot \beta \cdot x - \gamma \cdot y \cdot a - z \cdot b \cdot \alpha \end{matrix}$$

$$\det(B^T) = \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ a & b & c & a & b \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ x & y & z & x & y \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \cdot \beta \cdot z + b \cdot \gamma \cdot x + c \cdot \alpha \cdot y \\ - x \cdot \beta \cdot c - y \cdot \gamma \cdot a - z \cdot \alpha \cdot b \end{matrix}$$

b) zu zeigen: $\det(A) = \pm 1$, wenn A orthogonal gilt $A \cdot A^T = I$ $\det(I) = 1$

$\Rightarrow 1 = \det(I) = \det(A \cdot A^T) \overset{7.6a}{=} \det(A \cdot A) = (\det(A))^2$

zu 7.6 b):

$\Rightarrow$ somit gilt: $\quad 1 = (\det(A))^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 1 = \det(A) \quad \square$

7.2) z.z.: wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orth., dann $A \cdot B$ und BA ebenfalls orth.

$(AB) \cdot (AB)^T = I$

$(AB) \cdot (AB)^T = A \cdot \underbrace{B \cdot B^T}_{I} \cdot A^T = A \cdot I \cdot A^T = A \cdot A^T = I$

$(BA) \cdot (BA)^T = I$

$(BA)(BA)^T = B \underbrace{A \cdot A^T}_{I} B^T = B \cdot I \cdot B^T = B \cdot B^T = I$ $\square$

7.4 "$\Leftarrow$": $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ $\square$

$\begin{pmatrix} \hat{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \hat{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \hat{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \hat{c} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \hat{a}^2 + \tilde{b}^2 & \hat{a}\tilde{b} + \tilde{b}\hat{c} \\ \hat{a}\tilde{b} + \tilde{b}\hat{c} & \tilde{b}^2 + \hat{c}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}^2 + \tilde{b}^2 & \hat{a}\tilde{b} + \tilde{b}\hat{c} \\ \hat{a}\tilde{b} + \tilde{b}\hat{c} & \hat{a}^2 + \hat{b}^2 \end{pmatrix}$

"$\Rightarrow$": $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \vee A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \hat{c} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\beta & \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \alpha\beta + \gamma\delta & \beta^2 + \delta^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 \wedge \alpha\gamma + \beta\delta = \alpha\beta + \gamma\delta$

$\Leftrightarrow \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta \overset{\mathrm{I}}{=} \gamma \vee \beta \overset{\mathrm{II}}{=} -\gamma$

a) $\alpha\gamma + \beta\delta = \alpha\beta + \gamma\delta$

I $\alpha\beta + \beta\delta = \alpha\beta + \beta\delta$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \overset{\wedge}{=} 2.$ Form

II $\alpha\gamma - \gamma\delta = -\alpha\gamma + \gamma\delta$

$\alpha\gamma = \gamma\delta$

$\Rightarrow \underset{1}{\gamma = 0} \vee \underset{2}{\alpha = \delta}$

1: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \hat{=}$ 2. Form

2: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \hat{=}$ 1. Form