8.1) $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\3&6&6\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}3&3\\6&6\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix}$

$= 3\cdot 6 - 3\cdot 6 - (2\cdot 6 - 3\cdot 3) + 2\cdot 6 - 3\cdot 3$

$= 0 - 3 + 3$

$= 0$ ✓

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind linear abhängig ✓ $\frac{2}{2}$

8.2 a) $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} I & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ II & 2 & 1 & 4 & 11 & 13 \\ III & -2 & 14 & 3 & 11 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{l} II - 2\cdot(I) = II' \\ III + 2\cdot(I) = III' \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} I & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ II' & 0 & 5 & 2 & 7 & 9 \\ III' & 0 & 10 & 5 & 15 & 20 \end{array} \qquad III' - 2\cdot(II') = III''$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} I & 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ II' & 0 & 5 & 2 & 7 & 9 \\ III'' & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

setze $\boxed{x_4 = \lambda}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_3 + \lambda = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{x_3 = 2-\lambda}$

$\Rightarrow 5x_2 + 2(2-\lambda) + 7\lambda = 9 \quad |-4$

$\Leftrightarrow 5x_2 + 5\lambda = 5 \quad |:5$

$\Leftrightarrow \boxed{x_2 = 1-\lambda}$

$\Rightarrow x_1 - 2(1-\lambda) + (2-\lambda) + 2\lambda = 2$

$\Leftrightarrow x_1 + 3\lambda \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = 2-3\lambda}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \checkmark$$

b) $\text{Kern}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \checkmark$

c) Die Elemente des Kerns werden mit ~~ausgerechnet~~ Lösen des Gleichungssystems ausgerechnet. ✓

4/4

8.3 a)

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ \mathrm{II} & 2 & 4 & 3 & 16 \\ \mathrm{III} & 3 & 7 & 6 & 28 \\ \mathrm{IV} & 4 & 10 & 8 & c \end{array}$$

$\mathrm{II} - 2 \cdot (\mathrm{I}) = \mathrm{II}'$

$\mathrm{III} - 3 \cdot (\mathrm{I}) = \mathrm{III}'$

$\mathrm{IV} - 4 \cdot (\mathrm{I}) = \mathrm{IV}'$

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ \mathrm{II}' & 0 & 2 & 1 & 4 \\ \mathrm{III}' & 0 & 4 & 3 & 10 \\ \mathrm{IV}' & 0 & 6 & 4 & c-24 \end{array}$$

$\mathrm{III}' - 2 \cdot (\mathrm{II}') = \mathrm{III}''$

$\mathrm{IV}' - 3 \cdot (\mathrm{II}') = \mathrm{IV}''$

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ \mathrm{II}' & 0 & 2 & 1 & 4 \\ \mathrm{III}'' & 0 & 4 & 1 & 2 \\ \mathrm{IV}'' & 0 & 0 & 1 & c-36 \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

$\Rightarrow 2 = c - 36$

$\Leftrightarrow c = 38$ ✓

b)

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ \mathrm{II} & 0 & 2 & 1 & 4 \\ \mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ✓

4/4

8.4 a) Gegeben sind $B := \{ v, v \} \subset \mathbb{R}^2$

$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w := \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Hilfsvektor $u := \dfrac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$

$$u = \frac{\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15+5}{9+1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} ✓$$

$$\tilde{w} = w - u = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} ✓$$

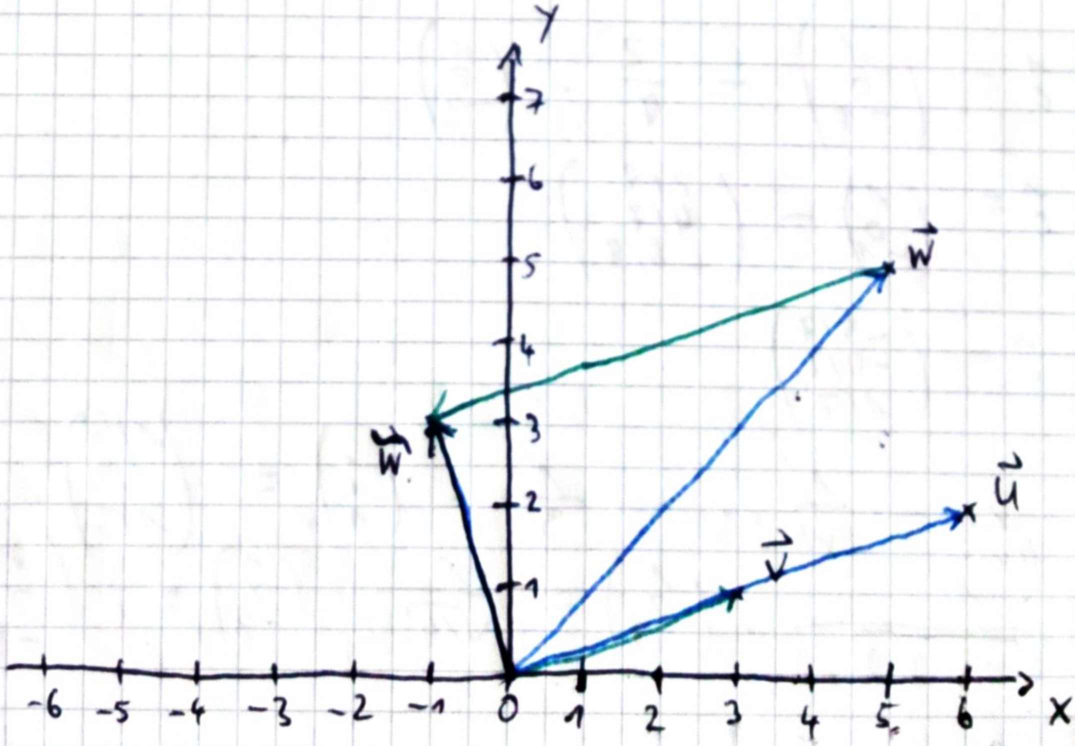
b) $$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\|} \rangle \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\|} ✓$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+1^2}} \rangle \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} ✓ \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \sqrt{10} \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} \quad (-0.5)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} ✓$$

c)



✓

d) $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind senkrecht zueinander. ✓ $3{,}5/4$

8.5 a) $\left\langle \vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}, \vec{v} \right\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \left(\vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v} \right) \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓ $1/2$

8.5 b) / 0

8.6 a) $\tilde{c} = \vec{c} - \frac{\langle \vec{c}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}$

$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2+1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

b) $\hat{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\hat{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\hat{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$

$\hat{c} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ ✓

c) $v: \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ✓

$w: \frac{1}{\sqrt{1^2+4+9}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2 \cdot 1/\sqrt{14} \\ -3 \cdot 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$ ✓

$$\hat{c} : \frac{1}{\sqrt{(-5/7)^2 + (-4/7)^2 + (1/7)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{42}}{7} \cdot ?$$

8.3b) $\mathrm{Spann}(\vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Spann}(\vec{v}, \tilde{w})$ 8

$\Leftrightarrow \mathrm{Spann}(\vec{v}, \vec{w}) \underset{\text{I}}{\subseteq} \mathrm{Spann}(\vec{v}, \tilde{w}) \wedge \mathrm{Spann}(\vec{v}, \vec{w}) \underset{\text{II}}{\supseteq} \mathrm{Spann}(\vec{v}, \tilde{w})$

zu I: $\lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{w} \in \mathrm{Spann}(\vec{v}, \tilde{w})$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 : \exists \mu_1, \mu_2 : \lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{w} = \mu_1 \cdot \vec{v} + \mu_2 \cdot \tilde{w}$

$\tilde{w} = \vec{w} - a \cdot \vec{v}$ mit $a = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{w} = \mu_1 \cdot \vec{v} + \mu_2 (\vec{w} - a \cdot \vec{v})$

$= \mu_1 \cdot \vec{v} + \mu_2 \cdot \vec{w} - \mu_2 \cdot a \vec{v} = (\mu_1 - \mu_2 \cdot a) \cdot \vec{v} + \mu_2 \cdot \vec{w}$

$\Rightarrow \lambda_1 = (\mu_1 - \mu_2 \cdot a)$

$\lambda_2 = \mu_2$